Material de Apoyo para Docentes

8 de abril de 2009

Índice general

Capítulo 1

Funciones

1.1. Introducción

Una primera aclaración (y quizás la más importante) es que el presente material es un complemento al videojuego. Se invita desde ya a los profesores que, idealmente antes de la lectura de este apunte, experimenten en forma personal las posibilidades que el juego les ofrece. De ese modo, la lectura de lo que sigue resultará mucho más provechosa. Una alternativa factible (pero no recomendada) es, si se desea avanzar más rápidamente en la lectura, pasar directamente a la sección 1.5, donde comienza el tratamiento del juego, saltándose la aproximación teórica.

Una vez que los estudiantes hayan jugado lo suficiente, algunas nociones del manejo de funciones (ciertamente no todas) serán retenidas por ellos. Esta plataforma inicial representa una rica instancia, que combinado con las clases dictadas por los profesores, permitirá simplificar el aprendizaje y brindarle significancia.

Por lo anterior, en los contenidos tratados se introducen rápidamente ejemplos relacionados con el videojuego, los que se combinan con otros más tradicionales, en orden de abordar la materia desde más de una perspectiva; logrando así unir la experiencia lúdica de los estudiantes con las nociones matemáticas que se pretende que ellos manejen.

Las funciones constituyen, sin duda, uno de los aspectos más importantes en el aprendizaje de la Matemática. No obstante, es frecuente que los estudiantes confundan varios de los elementos que aquí se ven involucrados. La inclusión de la composición de funciones relacionada con las transformaciones isométricas en el currículum nacional, hace pertinente el trato de esta unidad (y, por consecuencia, la siguiente).

El presente capítulo apunta a aclarar algunos de dichos elementos, intentando que los jóvenes alcancen de forma intuitiva conceptos propios a la naturaleza de las funciones y la composición de las mismas. Bajo ninguna circunstancia esta sección es un estudio acabado de las funciones, sino una aproximación didáctica a algunas nociones de ellas. Por esta razón, las definiciones no serán rigurosas, sino suficientes para los fines de la actividad.

1.2. Objetivos Fundamentales

- Ligar la experiencia de juego de los estudiantes, con el contenido de funciones.
- Interiorizar el concepto de función, entendiéndola como una operación que puede representarse a través de cartas, o como una *máquina* que *transforma* un valor determinado en otro.
- Conocer situaciones de la vida real en que se enfrentan situaciones que requieren decisiones similares a la del videojuego. Valorar, de este modo, la experiencia.
- Entender la composición de funciones como la aplicación de 2 o más cartas, o bien, el paso sucesivo a través de 2 o más *máquinas*.
- Apropiarse de la idea que la composición de funciones no es conmutativa.

1.3. Aprendizajes Esperados

Los alumnos, al cabo de la realización de esta unidad deben lograr los siguientes aprendizajes:

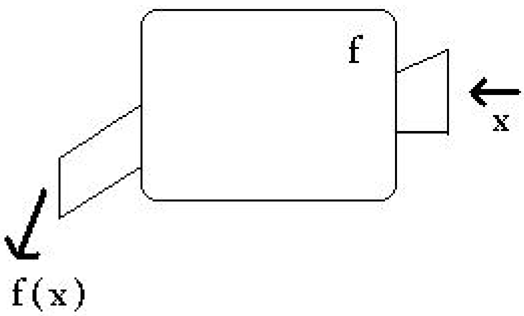
- Entender la función como un proceso que recibe un valor, y entrega otro valor, comprendiendo que para un mismo valor, el resultado final es siempre el mismo.
- Bajo esta lógica, en la composición de funciones, el orden en que las funciones se componen es fundamental. A distintos órdenes, es posible obtener distintos resultados. La composición de funciones, por tanto, no es conmutativa.
- Comprender que, ordenadas de diferentes maneras ciertas cartas (o ciertas máquinas determinadas) y un mismo valor inicial, es posible obtener resultados diferentes.
- Manejar los resultados obtenidos ordenando las cartas o *máquinas* de distinta forma, logrando obtener los máximos o mínimos valores posibles, dadas ciertas condiciones iniciales.

1.4. Aproximación teórica

1.4.1. Funciones como máquinas

Para efectos de no extender la lección más allá de lo necesario, resulta conveniente introducir un concepto de funciones de orden intuitivo, que los estudiantes sepan incorporar y manejar adecuadamente, permitiéndoles apropiarse de los fundamentos de las funciones y establecer una base a partir de la cual puedan, si fuese necesario, construir una teoría más rigurosa.

Dejando de lado (por el momento) los conceptos de dominio y codominio, que claramente los alumnos no logran interiorizar inmediatamente de forma completa, centrémonos en la función como un proceso de *transformación* de un elemento en otro. Si evaluamos un mismo elemento, digamos x_0, una gran cantidad de veces vía un misma función f, el resultado obtenido será siempre el mismo, denominémoslo y_0. Esta propiedad de las funciones las hace susceptibles de ser modeladas como una máquina, que recibe un número x, y entrega otro número $f(x)$.

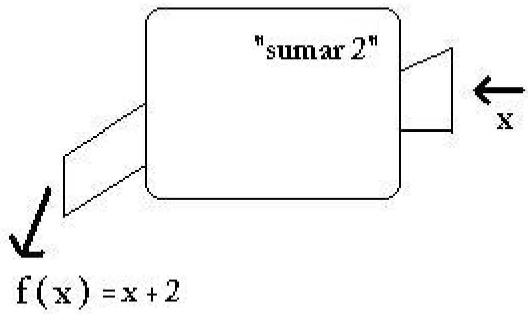


1.4.2. Funciones y Cartas

Es probable que los estudiantes puedan sentir un cierto grado de confusión al ver por primera vez estas máquinas que representan funciones. Es en este instante donde de inmediato se les puede sugerir una directa relación entre la representación recién mencionada y la que experimentaron jugando; esto es, la de las cartas. Recordarles lo que tuvieron que hacer para que el Yopo adquiriera más velocidad al correr y cómo esto se traduce en la representación de máquinas resultará bastante útil.

De este modo, lo que se pretende es que el docente pueda abordar el capítulo de funciones ayudado por las herramientas que brinda el videojuego.

Veamos la equivalencia entre una función descrita como una máquina y la misma función descrita utilizando las cartas.



De este modo, es posible tratar con los estudiantes varios conceptos de funciones, sin necesidad de adentrarse más profundamente en la teoría. Esta metáfora permite, entre otros ejercicios:

1. Conocer la imagen de un elemento conociendo éste último y la fórmula de definición de la función

2. A partir de una imagen y la fórmula de definición intentar conocer posibles valores que, vía la función, dieron como resultado dicha imagen.

3. Intentar determinar una posible fórmula de definición, conociendo el argumento de la función y su correspondiente imagen.

Variados ejercicios de este tipo son útiles para afirmar en los estudiantes conceptos tales como:

- Para un número fijo, el resultado de evaluarlo en una función determinada, será siempre el mismo.

- Es posible que un número no sea imagen de otro (Ej.: Si la máquina realiza la labor de élevar al cuadrado', -1 no puede ser un resultado producido por dicha máquina).
- Pueden existir varias fórmulas de definición que a un número determinado le asocien una misma imagen (Ej.: Si el número es -2 y su imagen es 2, las fórmulas de definición $f(x) = |x|$ y $f(x) = -x$ son factibles).
- Un corolario de lo anterior es que conociendo un número finito de elementos y sus correspondientes imágenes, no es posible afirmar con exactitud cuál es la regla de asignación.

1.4.3. Composición

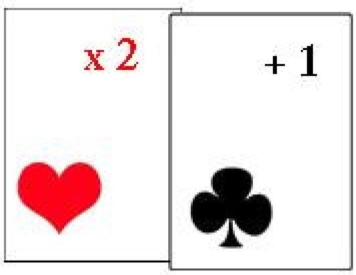
Cartas y Composición

En este punto comienzan a notarse las bondades que la experiencia del videojuego brinda para la enseñanza de las funciones:

Las cartas son bastante cómodas para representar composiciones. Es esperable que los estudiantes entiendan más naturalmente la composición utilzando esta forma. Es importante recordar que las cartas van ingresando de izquierda a derecha, y que ese es el orden que seguirán las funciones. Más adelante nos referiremos un poco más a la importancia del orden en la composición.

Es altamente probable que a los estudiantes les resulte más natural entender la composición de funciones con las cartas que con las máquinas. Es recomendable, por tanto, comenzar explicando la composición con la combinación de cartas que los mismos alumnos debieron hacer para lograr que sus Yopos corrieran hacia la meta. Recordarles que ellos debían combinar cartas para lograr distintos resultados podría ayudarles a recibir en forma más natural la idea del acoplamiento de máquinas posteriormente.

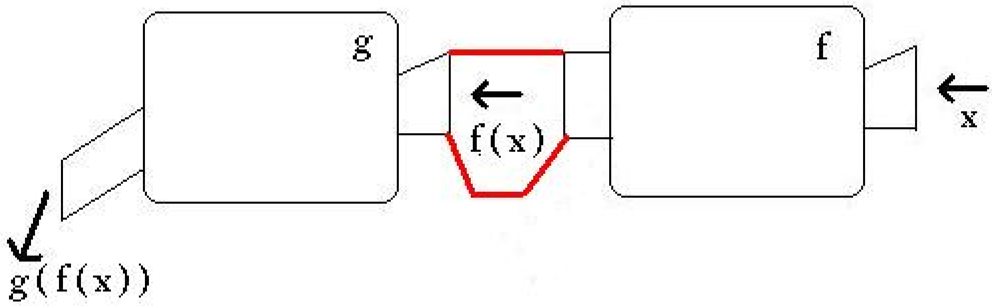
De este modo, la composición de funciones utilizando las cartas puede verse como sigue:



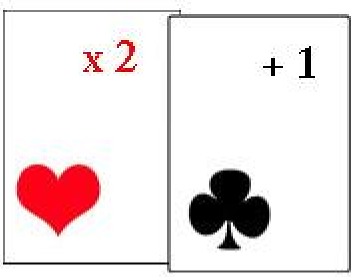
Tengo un número inicialmente. Lo multiplico por 2, luego le sumo uno y obtengo el resultado final

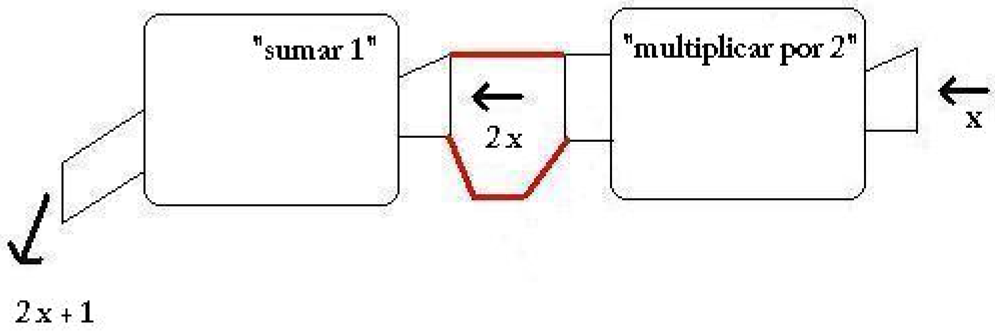
Máquinas y Composición

Si se sigue utilizando la noción de máquinas, es posible representar la composición de 2 funciones como el acoplamiento de 2 máquinas:



Veamos ahora la equivalencia en la composición de funciones entre ambas metáforas:





Acá es posible hacer notar a los estudiantes que lo que estaban haciendo al combinar cartas es equivalente a acoplar máquinas y, en definitiva, a componer funciones.

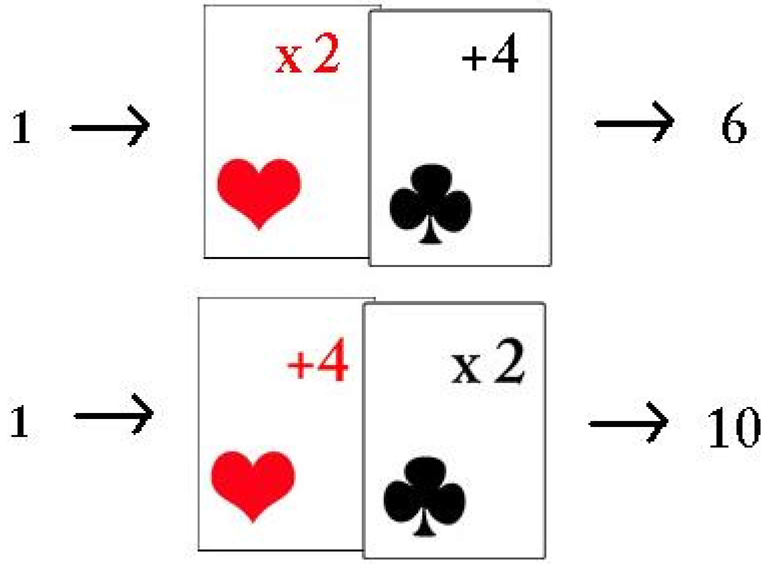
Acá, si el profesor lo desea, es posible explicar a los estudiantes algunos elementos de composición que se mencionan en el apéndice, utilizando el lenguaje de máquinas y cartas. En orden de que la composición tenga sentido siquiera, es vital que el resultado entregado por la primera máquina sea un insumo adecuado para la segunda (esto es, que las imágenes vía la primera función estén dentro del dominio de la segunda[1]). La notación de cartas no hace evidente esta situación, y resulta útil para enfocarse en la composición misma, dejando de lado esa teoría que, por el momento, puede ser obviada.

Orden en la composición

Se comienza aquí uno de los puntos esenciales de este capítulo. Es muy importante hacer notar a los estudiantes que el orden en que las funciones son compuestas (o, en el lenguaje metafórico, el orden en que las máquinas son acopladas o en que las cartas son situadas) es fundamental para el resultado obtenido. Para verificar esta afirmación, observemos la composición de 2 funciones en un sentido, y luego en el sentido inverso. Se debe mostrar a los estudiantes que en general el resultado no es el mismo al invertir el sentido, o que incluso tras la inversión ni siquiera sea posible la composición.

En el caso de las cartas, centremos el énfasis en los distintos resultados que se pueden obtener al ordenar las cartas de forma diferente (que es el meollo del juego de los Yopos):

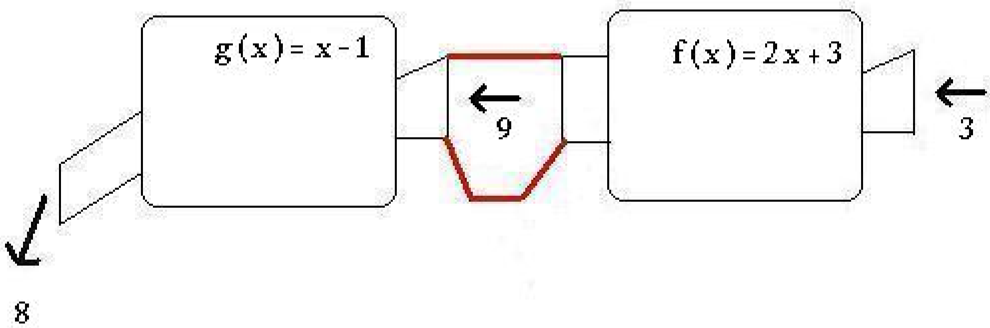
[1]Ver la sección de composición de funciones del apéndice para mayor profunidad

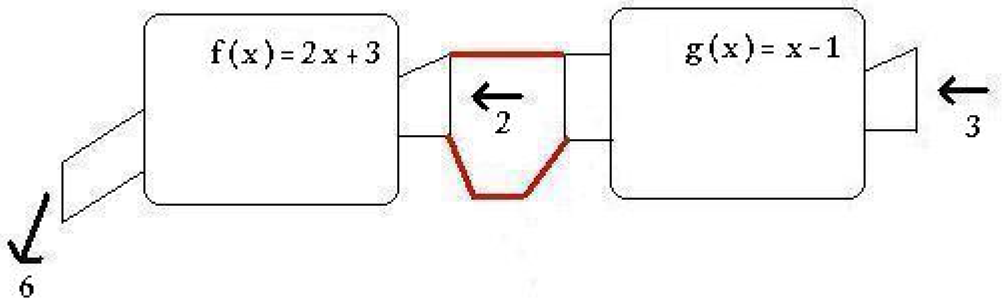


Recordar a los estudiantes que escoger las cartas en distintos órdenes producía distintos resultados en la barra de impulso del Yopo.

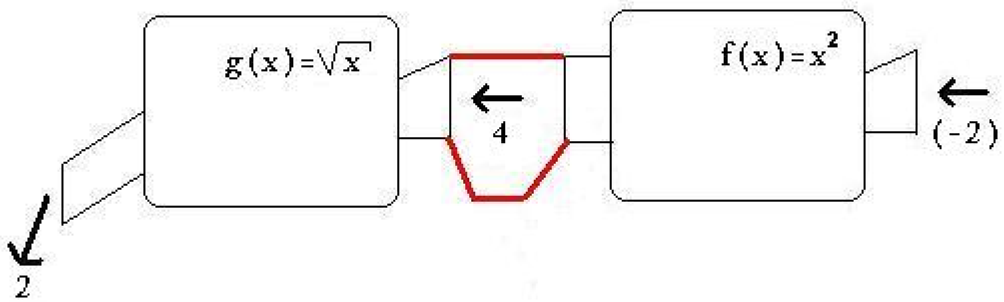
Nuevamente, lo esperable es que los estudiantes comprendan la importancia del orden en la composición de funciones más naturalmente utilizando el lenguaje de las cartas. Esta metáfora permitirá que manejen esta idea en forma satisfactoria a un nivel básico. No obstante, hay un trasfondo teórico que el docente pudiera querer mencionar, para el cual es conveniente trabajar también un poco con las máquinas nuevamente.

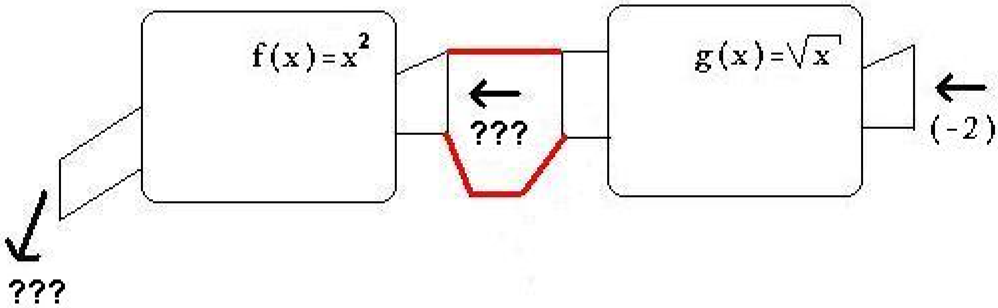
Obsérvense las siguientes situaciones:





En este caso, al invertir el orden de las máquinas, el resultado de evaluar el mismo número es distinto. Cabe mencionar que es posible que se desee hacer experimentar los juegos a niños más pequeños, en cuyo caso la exposición de la unidad pueda significar que no se desee mencionar a los estudiantes el lenguaje algebraico de las fórmulas de asignación de las funciones. En este caso, es recomendable denominar a las máquinas verbalizando las operaciones involucradas. Así, la máquina $f(x) = 2x+1$ se mencionaría como *multiplicar por 2 y sumar uno*, y la máquina $g(x) = x-1$ se nombraría como *restar uno*.





En este caso, al invertir el orden de las máquinas, ni siquiera es posible realizar la composición, puesto que no se puede sacar raíz cuadrada a un número negativo. Esto es, el número -2 no es un insumo adecuado para la máquina $g(x) = \sqrt{x}$.

A estas alturas, debe quedar muy claro que la composición de funciones no es conmutativa.

1.5. El Yopódromo y la composición de funciones. Nociones didácticas

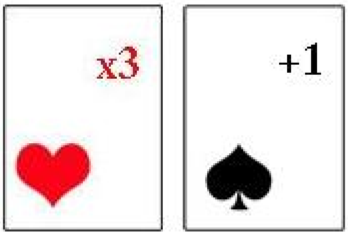
Nos encontramos ante una carrera entre estos simpáticos animales. La misión es hacerlos correr tan rápido como sea posible para que traspasen la línea de meta antes de los Yopos que son manejados por el resto de los competidores. Ã¸Cómo hacerlo? Pues bien... aquí entran en juego las tan mencionadas funciones; y, más específicamente, la composición de ellas.

1.5.1. Decisiones cruciales

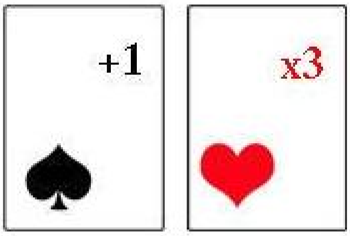
Las operaciones matemáticas son realizadas sobre la variación de la rapidez del Yopo. Se comienza con un incremento nulo, y las cartas que escojamos irán modificando dicho incremento conforme las operaciones que estas cartas representan.

1.5.2. La partida

Al comenzar la carrera, el estudiante debe enfrentar la primera gran decisión. El Yopo se encuentra listo para correr, y depende de las cartas que sean escogidas qué tan bueno sea el arranque, si es que llega a haber alguno. En este punto, es recomendable tener en cuenta que al iniciar la carrera, la velocidad de nuestro Yopo es cero. Sin duda, que en estas circunstancias, multiplicar por algún factor no es una buena idea, como tampoco lo es elevar a alguna potencia. La resta resulta útil sólamente si después es posible elevarla al cuadrado (trataremos esto un poco más adelante). Los estudiantes deben descubrir que, en térimnos generales (excluyendo la situación anterior), la adición es una buena elección para una primera carta en este momento.



Se escogen cartas de multiplicación y adición. No obstante, el resultado no es óptimo. Nuestro Yopo avanza, pero la barra de energía no se llena completamente. Ã¸Por qué?



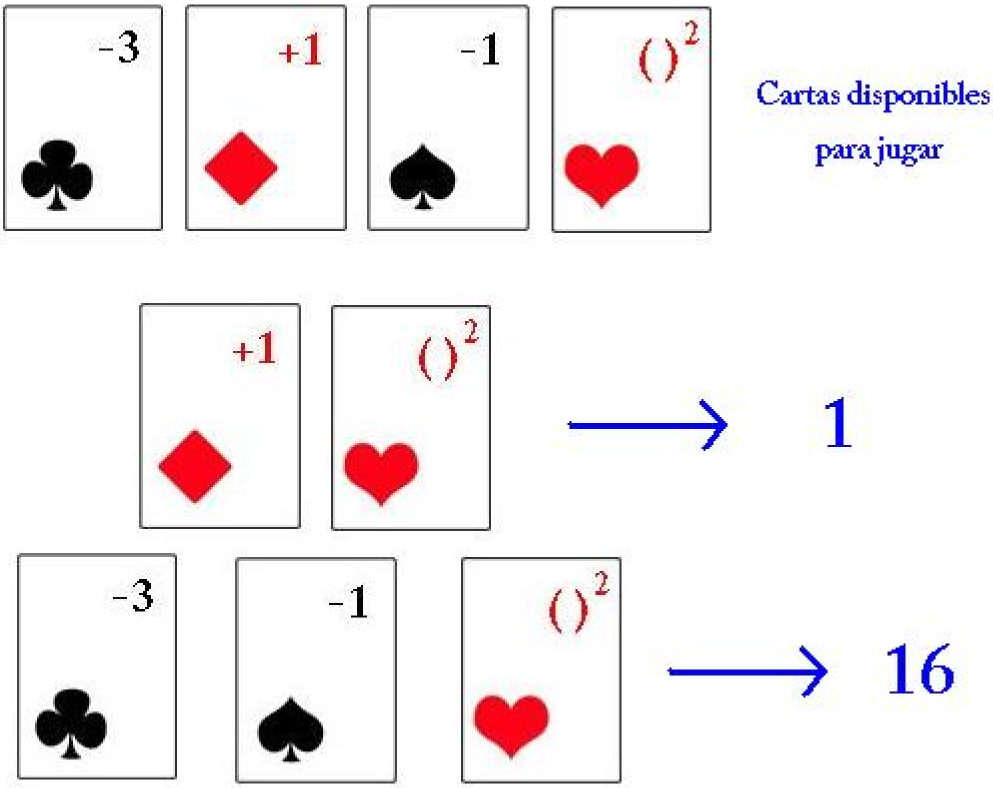
Esta vez son escogidas las mismas cartas que en el caso interior, pero en el orden inverso. Esta vez, nuestro Yopo se impulsa con celeridad. Esta primera jugada es óptima, llena la barra de impulso. De paso, deja más que claro algo bastante importante: La composición de funciones NO es conmutativa.

1.5.3. La carrera

Una vez que el Yopo comienza a correr, el estudiante se verá enfrentado consecutivamente a varias decisiones similares. Nuevamente, lo que se está determinando es el incremento de la rapidez del Yopo. Otra vez se comienza con un incremento nulo, y las cartas escogidas modificarán este incremento hacia el resultado final.

1.5.4. El caso de la resta

En determinadas circunstancias, aunque se deje ver en las instrucciones del juego que los Yopos gustan de los números positivos, puede resultar una buena estrategia escoger una resta; siempre y cuando finalicemos elevando al cuadrado; con lo que el resultado final será nuevamente positivo (y, lo que es importante, del gusto de nuestro Yopo). Observemos la siguiente situación:



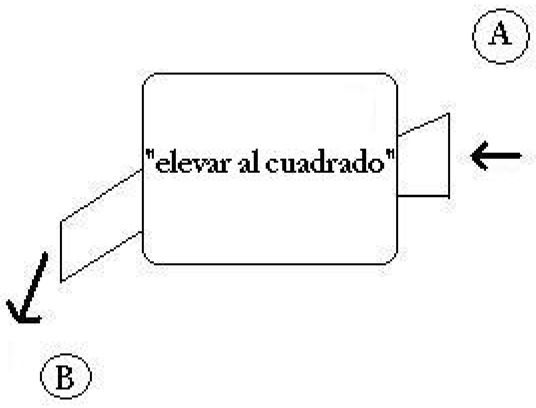
En la figura se aprecia cómo, dado un mismo conjunto inicial de cartas, se obtiene un mejor resultado escogiendo cartas de resta, y elevando finalmente al cuadrado. En la primera jugada, utilizando sólo adición y potencias, el incremento obtenido es 1; en tanto que en la segunda jugada, la combinación de sustracción y potencias se traduce en un incremento mucho mayor de 16.

El desafío ahora es que los alumnos descubran cómo combinar las cartas para optimizar la composición y, de este modo, el Yopo corra veloz y llegue a ganar la carrera. En base a esto y a la comprensión de los otros objetivos planteados es que se presentan las siguientes actividades.

1.6. Actividades sugeridas

Esta sección se divide en 2 partes: en la primera, se busca interiorizar a los estudiantes en los conceptos básicos de funciones, involucrando si fuese necesario el uso de las máquinas. En la segunda parte, se introducen las cartas y se busca que sea entendida la naturaleza del juego.

1. De acuerdo a la figura:



   a) Ã¸Qué número saldrá si ingresa un 3?

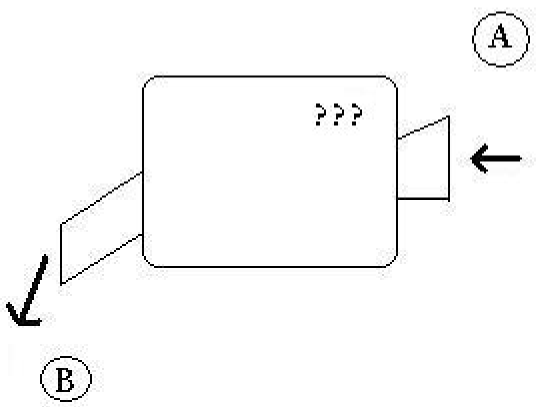
   b) Ã¸Qué número saldrá si ingresa un -4?

   c) Si en el punto B sabemos que hay un 9, Ã¸Qué número pudo haber ingresado en el punto A?. Ã¸Se te ocurre otra posibilidad?

   d) Si en el punto B sabemos que hay un 0, Ã¸Qué número pudo haber ingresado en el punto A?. Ã¸Se te ocurre otra posibilidad?

   e) Ã¸Puede haber un -4 en el punto B?. Ã¸Por qué?

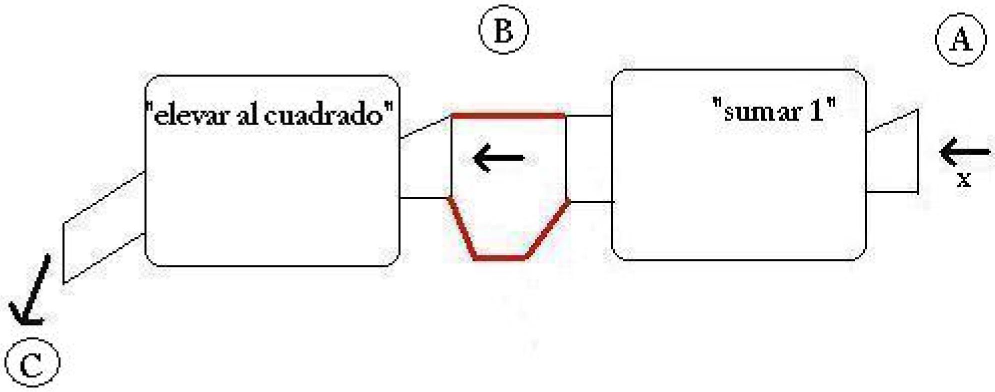
2. De acuerdo a la figura:



   a) Si en el punto A hay un 1 y en el punto B hay un 1, Ã¸Qué podría reemplazar los signos de interrogación?. Ã¸Se te ocurre otra opción?.

b) Responde la misma situación, pero con un -2 en el punto A y un 4 en el punto B.

3. De acuerdo a la figura:



a) Ã¸Qué número saldrá si ingresa un 2?

b) Ã¸Qué número saldrá si ingresa un -2?

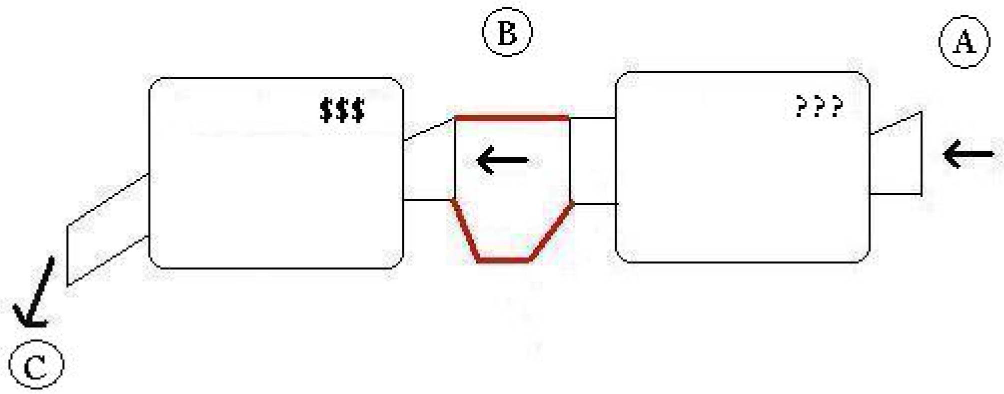
c) Si en el punto B sabemos que hay un 7, Ã¸Qué número pudo haber ingresado en el punto A?. Ã¸Qué número saldrá por el punto C?

d) Si en el punto B sabemos que hay un -5, Ã¸Qué número pudo haber ingresado en el punto A?. Ã¸Qué número saldrá por el punto C?

e) Si en el punto C sabemos que hay un 16, Ã¸Qué número pudo haber ingresado en el punto A?. Ã¸Se te ocurre otra posibilidad?

f) Ã¸Puede haber un -4 en el punto C?. Ã¸Y en el punto B?. Ã¸Por qué?

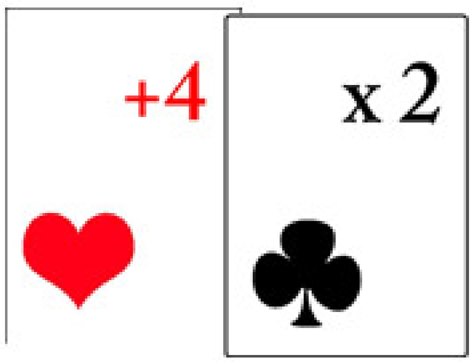
4. De acuerdo a la figura:



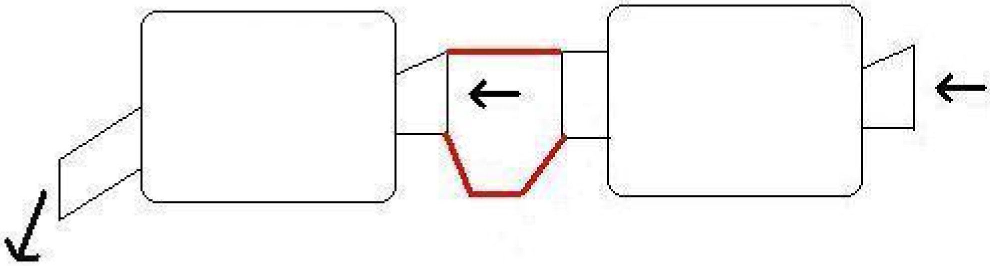
a) Si en el punto A hay un 1 y en el punto C hay un 4, Ã¸Qué podría reemplazar a los signos de interrogación y a los signos de peso?. Ã¸Se te ocurren otras combinaciones?

b) Si en el punto B hay -2 y en el punto C hay un 4, Ã¸Qué podría reemplazar a los signos de interrogación y a los signos de peso?. Ã¸Se te ocurren otras combinaciones?

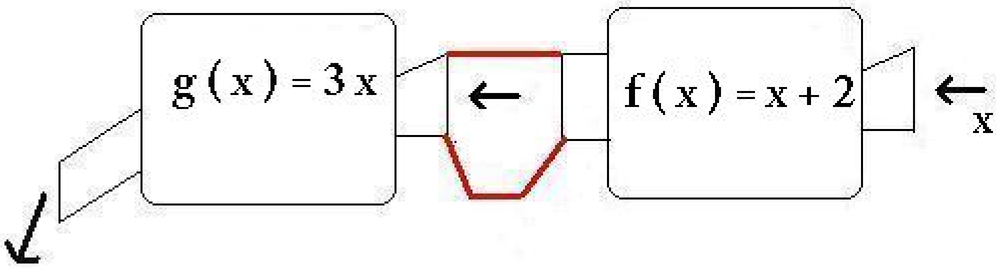
5. Observa la siguiente figura:



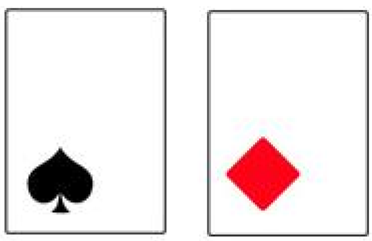
Rellena la siguiente figura para dar las mismas instrucciones:



6. Observa la siguiente figura:

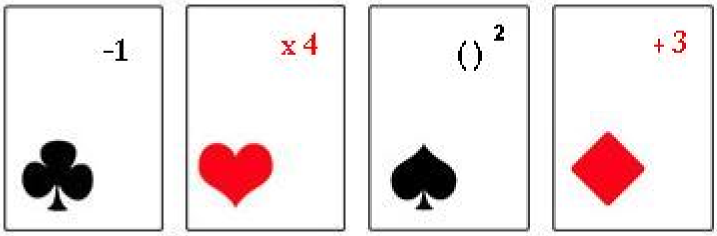


rellena la siguiente figura para dar las mismas instrucciones:

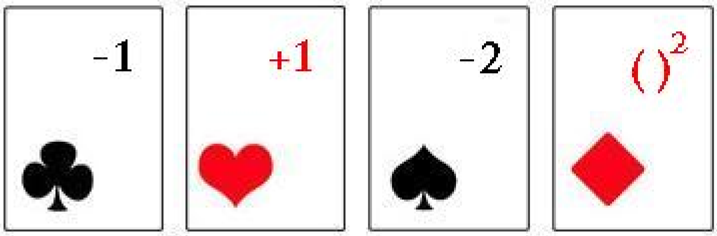


7. En los siguientes casos, observa la combinación de cartas. Supón que el valor inicial es 1. Indica cuál es la combinación que maximiza el resultado, e indica dicho resultado. Luego, repite el mismo ejercicio, pero considerando que el valor inicial es 0.

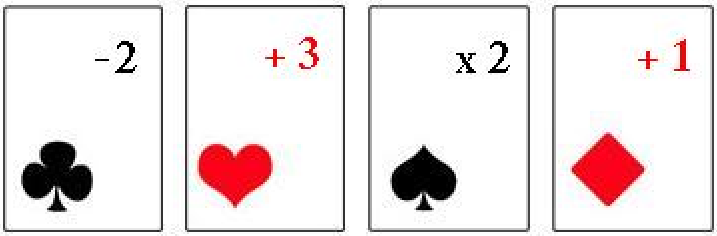
   a) Primera combinación:

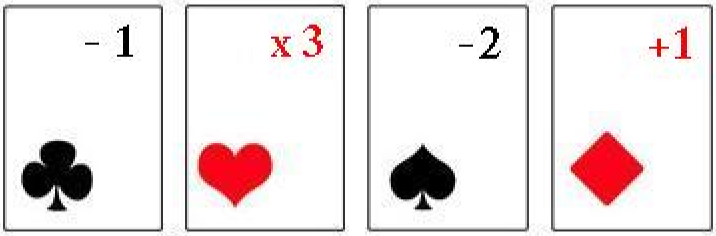
   a) Segunda combinación:

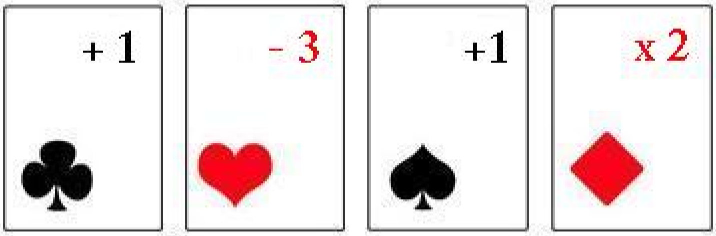
   a) Tercera combinación:

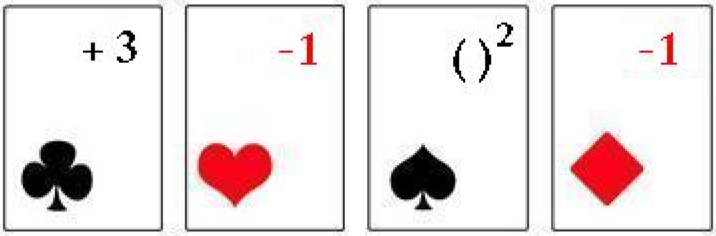
   

8. En los siguientes casos, observa la combinación de cartas. Escribe un signo ¿si el máximo valor posible de la primera combinación es mayor que el máximo valor posible de la segunda. Escribe un signo ¡si es menor, y un signo = si son iguales. En todos los casos el valor inicial es 0.

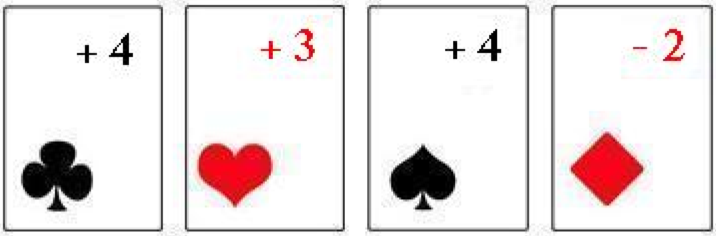


a)

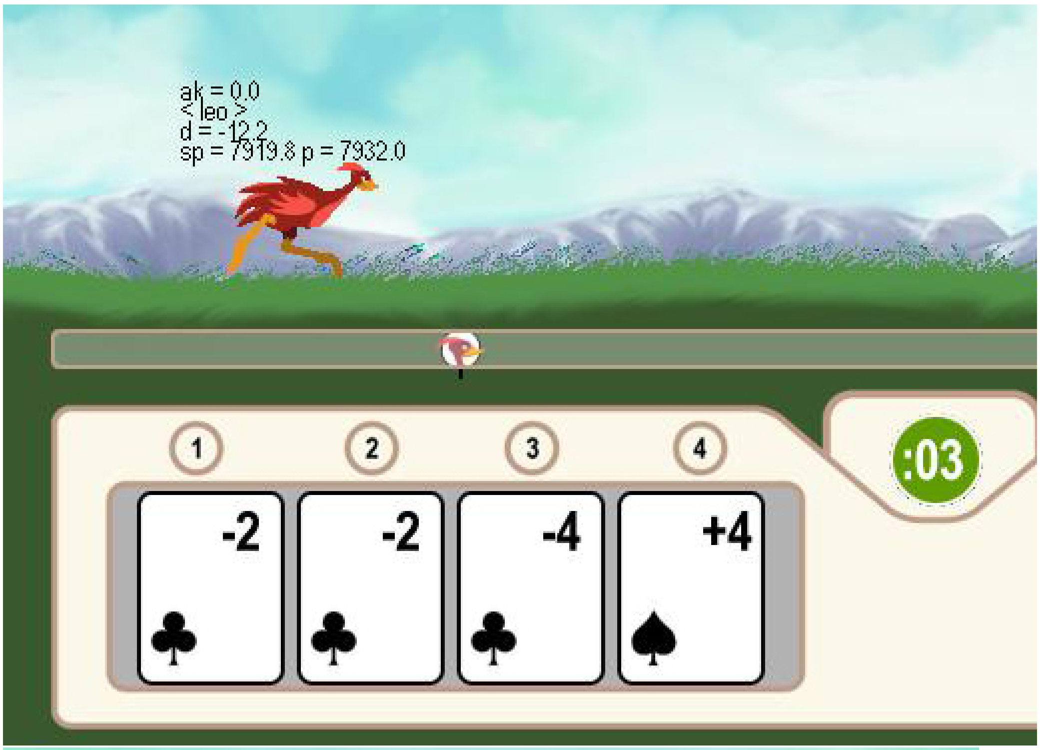




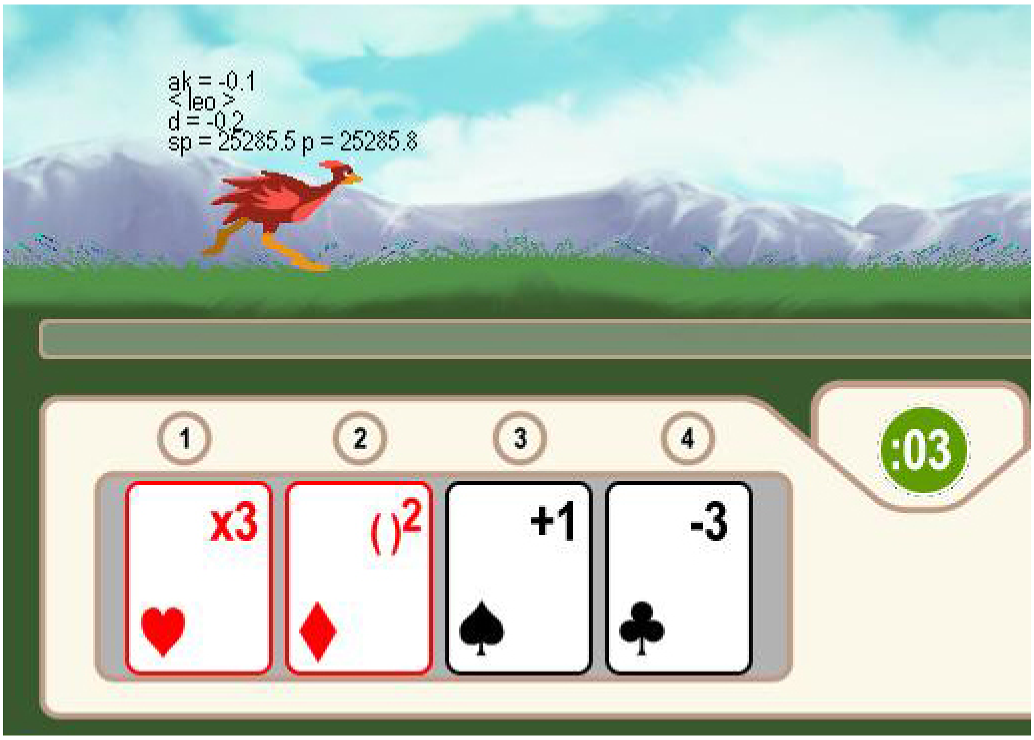
a)



9. Observa las siguientes situaciones de juego. Escoge en cada caso la combinación que produciría el peor resultado, y aquélla con la que obtendrías el mejor resultado. Compara tus resultados con tus compañeros, y verifica si piensan lo mismo. Finalmente, revísalo con tu profesor y el resto de la clase.


ak = 0.0
< leo >
d = -12.2
sp = 7919.8 p = 7932.0
1
2
3
4
-2
-2
-4
+4
:03


ak = 0.0
< leo >
d = -2.3
sp = 20540.7 p = 20543.1
1
2
3
4
-3
x2
+4
-1
:03

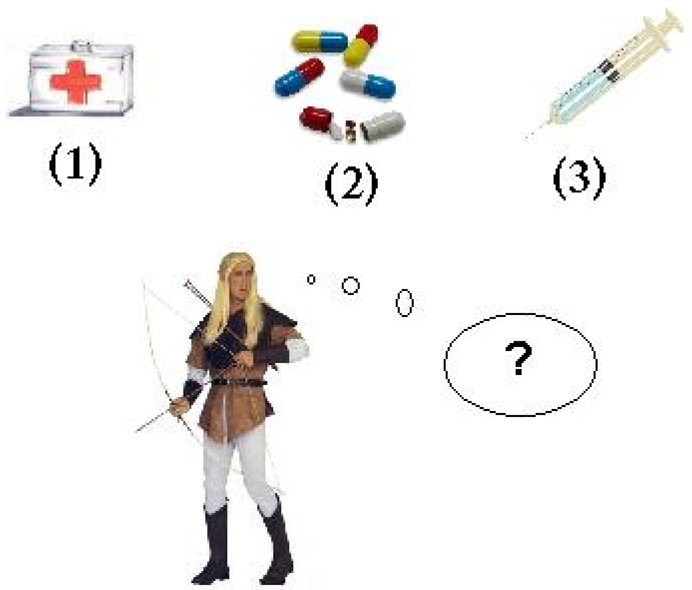


10. Un guerrero medieval está en un grave aprieto, y seguro que tú puedes ayudarlo. Después de un feroz ataque, su nivel de salud ha disminuído a sólo 1 punto. Un leve rasguño más, y morirá. No obstante, ha tenido la fortuna de encontrarse con 3 artículos que mejoran su salud. Estos son:

    - **(1) Botiquín:** Si los puntos de salud son inferiores a 10, el botiquín llenará el nivel de salud hasta 10 puntos. Sin embargo, si el nivel de salud es igual o superior a 10 puntos, el botiquín sólo añadirá un punto más a tu salud.

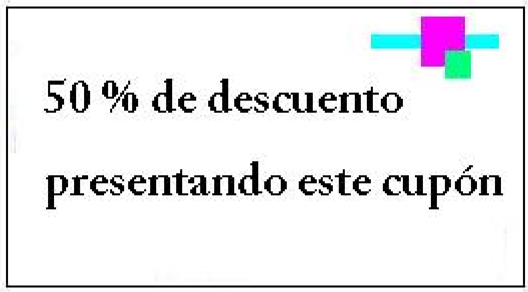
    - **(2) Píldoras:** Las píldoras duplican el nivel de salud anterior.

    - **(3) Inyección:** Añade siempre 5 puntos de salud.



Para comenzar su siguiente aventura, nuestro guerrero necesita contar con al menos 28 puntos de salud. Él no logra encontrar una manera de seguir adelante. Pero de seguro tú sí puedes indicarle cómo.

11. Normalmente, cuando una tienda ofrece varias promociones, suele indicar que éstas no son acumulables entre sí. Sin embargo, hay una tienda donde emitieron varios cupones de descuento, y permiten acumularlos (esto es, usar más de un cupón para una misma compra). Pero debes tener cuidado, los encargados de la tienda son muy estrictos, y sólo aplicarán los descuentos siguiendo el orden en que les entregues los cupones. Supón que el total de tu compra fue de $ 10.000 y que los cupones son los siguientes:



Indica el orden en que debes presentar los cupones para pagar lo menos posible.

Capítulo 2

Apéndice

2.1. Funciones

2.1.1. Definición

Una función entre dos conjuntos, digamos A y B, es una relación que a cada elemento del conjunto a le asigna un único elemento del conjunto B. En base a esta idea intuitiva se plantean las metáforas de las máquinas y las cartas.

2.1.2. Composición

Dadas 2 funciones, es posible definir la composición entre ellas. Obsérvense las siguientes definiciones:

Definición 1:

Sean las funciones:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$g : B \longrightarrow C$$

Entonces podemos definir la composición de ellas $f \circ g$:

$$f \circ g : A \longrightarrow C$$

$$x \mapsto f \circ g(x) = g(f(x))$$

Esta es la definición que normalmente se encuentra en los textos. No obstante, es posible lograr una definición que es un poco menos exigente con los conjuntos:

Definición 2:

Sean las funciones:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$g : C \longrightarrow D$$

Si se cumple que todos los elementos del conjunto B están contenidos dentro del dominio de g (esto es, el conjunto C), entonces podemos definir la composición de ellas $f \circ g$ de la siguiente forma [1]:

$$f \circ g : A \longrightarrow D$$

$$x \mapsto f \circ g(x) = g(f(x))$$

2.1.3. Dominio y Codominio

Aunque no es necesario para el desarrollo del videojuego, es posible también que la curiosidad de los estudiantes llegue más allá. O bien, la necesidad del docente de no omitir definiciones importantes se traduzca en el tratamiento del dominio y codominio de una función. De darse este caso, se sugiere a continuación una forma didáctica de enfrentarlo:

Una función relaciona elementos de un conjunto de partida (dominio) con elementos de un conjunto de llegada (codominio). Un elemento que no pertenezca al dominio, no puede ser evaluado por la función[2]. Este importante concepto se escapa absolutamente de la idea propuesta de función como una máquina. Sin embargo, si se explica que las máquinas están diseñadas para trabajar con ciertos insumos y no con otros, es posible salvar esta excepción (Una máquina que está diseñada para trabajar con papel, no funcionará si es alimentada con agua). Del mismo modo, es posible estimar cuál es el tipo de resultados que una determinada máquina puede producir; lo que puede ser relacionado con el codominio de una función. El instalar en los estudiantes la capacidad de predecir de qué tipo será el elemento producido por una *máquina* resultará fundamental para entender a cabalidad la composición de funciones, en donde la idea de dominio y codominio debe manejarse, aunque sea en un nivel básico.

[1] En realidad, basta con que todas las imágenes vía f del conjnto A estén contenidas en C, pero no llegaremos a hilar tan fino

[2] Excluyendo la posibilidad de redefiniciones de los conjuntos